嘉義縣國民中小學
科學展覽會作品說明書

屆　　別：60

科　　別：物理

組　　別：國中組

作品名稱：翻轉的箱子

關 鍵 詞：轉動慣量　旋轉不穩定

編　　號：A208

翻轉的箱子

科　　別：物理科

作品名稱：　翻轉的盒子

關鍵詞：　轉動慣量　　　旋轉不穩定

摘要：

在旋轉盒子的時候，會發現不同軸丟出來的結果會有些不同，有些是固定轉速，而有些是到快墜地時就開始亂轉，我們自己去借書，上網查找有關角動量、轉動慣量以及公式來解析實驗，並且使用 tracker 分析我們錄影的結果。而我們經由實驗及理論發現，造成盒子翻轉結果不一樣的原因是邊的長度，跟力道大小、旋轉速度無關。

實驗目的：

討論不同邊長或不同軸旋轉出來盒子的差異

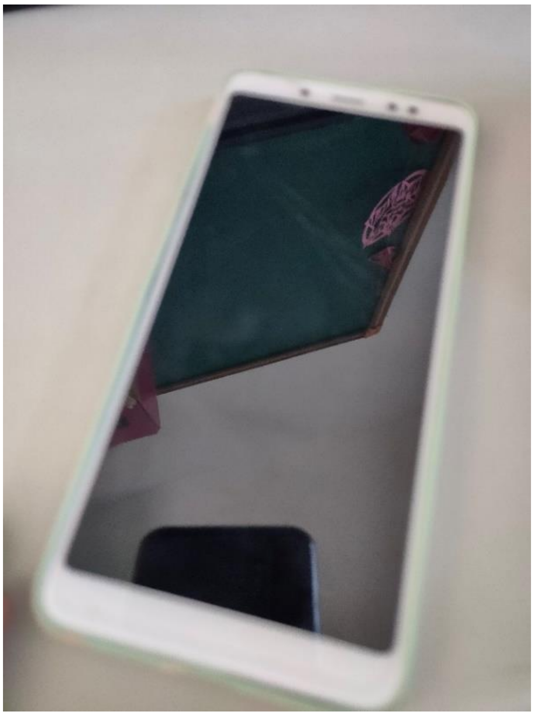
實驗動機：

我們在無聊的時候，會拿起箱子丟，但是我們發現，不同邊長丟出來的狀態，有些不太一樣，因此我們就在想到底是甚麼原因？

實驗器具：

盒子(圖 1.)　　　　　　　　　　　　　　（圖.2）

手機(圖 3.)

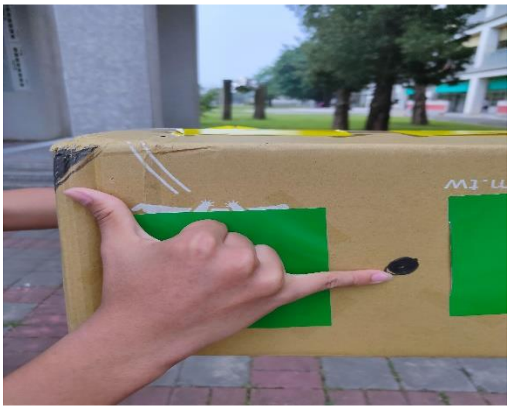


實驗流程:

（圖 4.）

第一種

1. 找出盒子的中心點。
2. 在要錄的面上其中一個角畫上黑點（如圖 4.）



3. 準備錄影
4. 當錄影開始後過一段時間再開始旋轉拋

PS. 手機跟著盒子

此實驗方法是為了測量旋轉時翻的情況

（圖 5.）

第二種(須兩台手機)

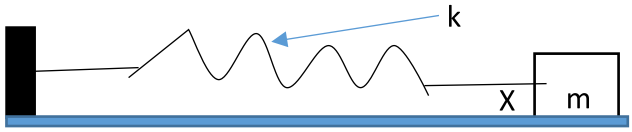
1. 把盒子六面貼上色紙(如圖 5.)
2. 錄影的人分別站在丟盒子的前方及右方（如圖 5. 所示）
3. 準備錄影並比數字以示影片順序(因有兩台手機)
4. 當錄影開始後過一段時間再開始旋轉拋。此種方法是因應丟不穩定時，只有轉半圈，而卻不知原因，因此用此方法測量其翻轉動態。

（圖 6.）

（圖 7.）

研究原理：

(圖 8.)彈簧示意圖



彈簧公式

$$F = -kx = ma \qquad (1.)$$

移項得

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad (2.)$$

把加速度變成微分型態且設 k/m 為 1

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -x \qquad (3.)$$

從此式可看出其加速度為自身位置對時間為微分兩次，因為彈簧施的力是回復力，所以力是反方向，因此要加負號。

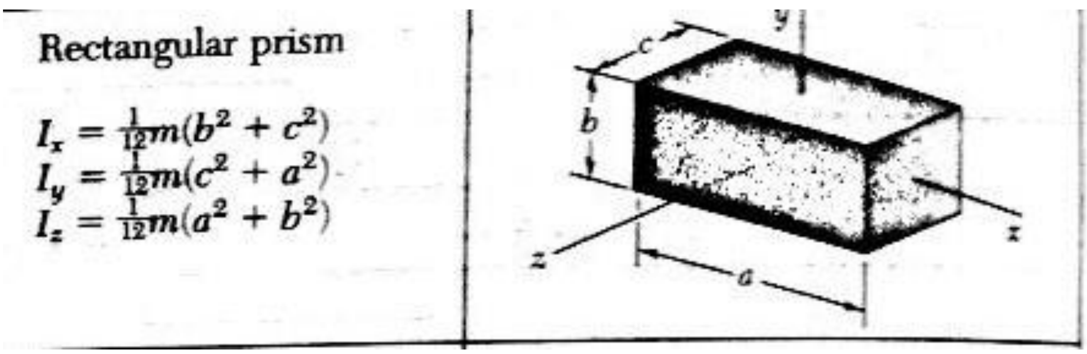
而穩定的震盪代表物體左右來回震盪，而我們的實驗中旋轉的盒子是在看何種邊長是屬於穩定，或是不穩定。

I 是轉動慣量，意思是轉動的難易度，I 的大小跟 r 也有關係。且每種物體都有特定的方程式。而適用長方體的公式是:

線性運動	旋轉運動
位移 x	角度 θ
速度 $v = \dot{x}$	角速度 $\omega = \dot{\theta}$
加速度 $a = \dot{v} = \ddot{x}$	角加速度 $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
質量 m	轉動慣量 $I = \sum_i m_i r_i^2$
動量 $p = mv$	角動量 $L = I\omega$
力 $F = ma = \frac{dp}{dt}$	力矩 $N = I\alpha = \frac{dL}{dt}$

物體以中心的 X 軸為旋轉軸時，轉動慣量就是下圖中的I_x

M 是物體質量，而 a、b、c 是邊長　　　(圖 9.)



所以當 $\mathrm{N} = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = \mathrm{I}\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + \omega \times (I\omega)$

如果沒有外力矩作用在轉動物體上，那 N=0

$$\mathrm{I}\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = -\omega \times (I\omega)$$

而$\dot{\omega}$ 這個上面有個點代表是被時間微分一次

$I_1\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3(I_2 - I_3)$ (4.)

$I_2\dot{\omega}_2 = \omega_1\omega_3(I_3 - I_1)$ (5.)

$I_3\dot{\omega}_3 = \omega_1\omega_2(I_1 - I_2)$ (6.)

因此當我們丟的物體是以 X 軸旋轉，而ω_1是以 X 轉軸的角速度且$\dot{\omega}_1 \sim 0$，但是物體又有一點點歪，導致有一點點的轉動分布在 Y 和 Z 軸上。此處定義之主要旋轉軸 X 軸引導的轉動慣量為I_1，而有些微轉動的 Y 軸及 Z 軸分別為I_2、I_3

接著我們把 10 和 11 式移項

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\omega_1\omega_3(I_3 - I_1)}{I_2}$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{\omega_1\omega_2(I_1 - I_2)}{I_3}$$

接著 繼續微分

$$\ddot{\omega}_2 = \frac{d\omega_3}{dt}\frac{\omega_1\omega_3(I_3 - I_1)}{I_2}$$

$$\ddot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3\frac{\omega_1(I_3 - I_1)}{I_2}$$

$$\ddot{\omega}_2 = \frac{\omega_1(I_3 - I_1)}{I_2}\frac{\omega_1\omega_2(I_1 - I_2)}{I_3}$$

$$\ddot{\omega}_2 = {\omega_1}^2\frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2I_3}\omega_2$$

同理

$$\ddot{\omega}_2 = {\omega_1}^2\frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2I_3}\omega_2$$

（公式 1.）

所以如果$I_1 < I_2 < I_3$ $\ddot{\omega}_2 = {\omega_1}^2\frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2I_3}\omega_2$<0 穩定

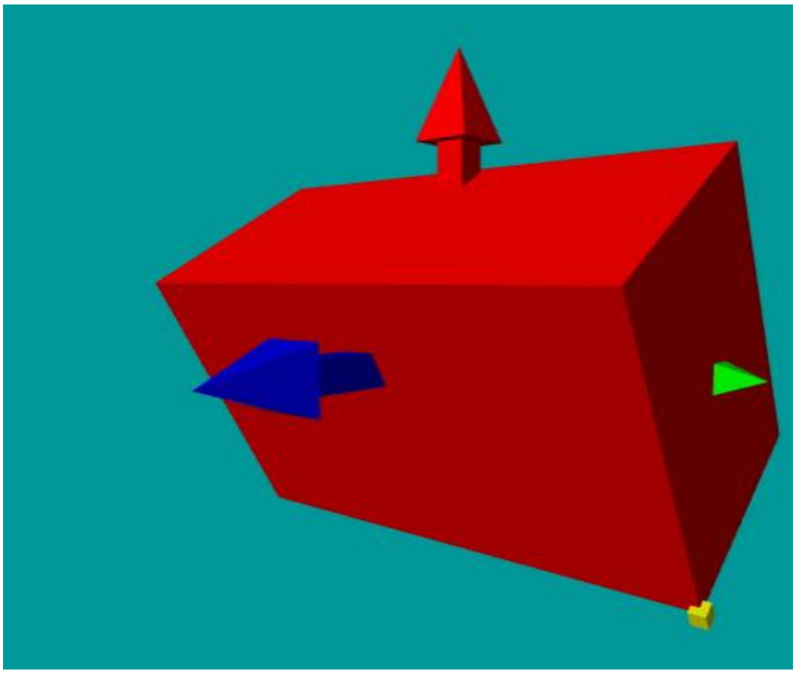
而 $I_2 < I_1 < I_3$ $\ddot{\omega}_2 = {\omega_1}^2\frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2I_3}\omega_2$便會>0 不穩定

圖 9 可以跟此處結合，而得出當旋轉時，旋轉的軸平行最長或最短邊時，為穩定的狀態，反之，如果是平行中間長度的邊時，為不穩定。

研究結果與討論

電腦模擬

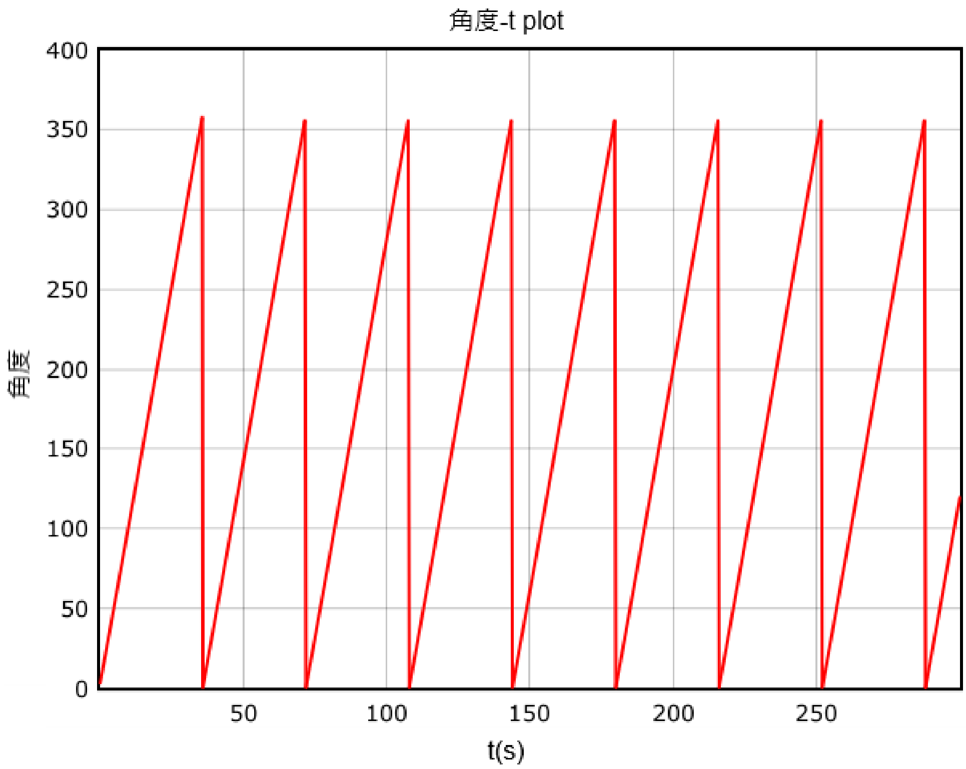
穩定



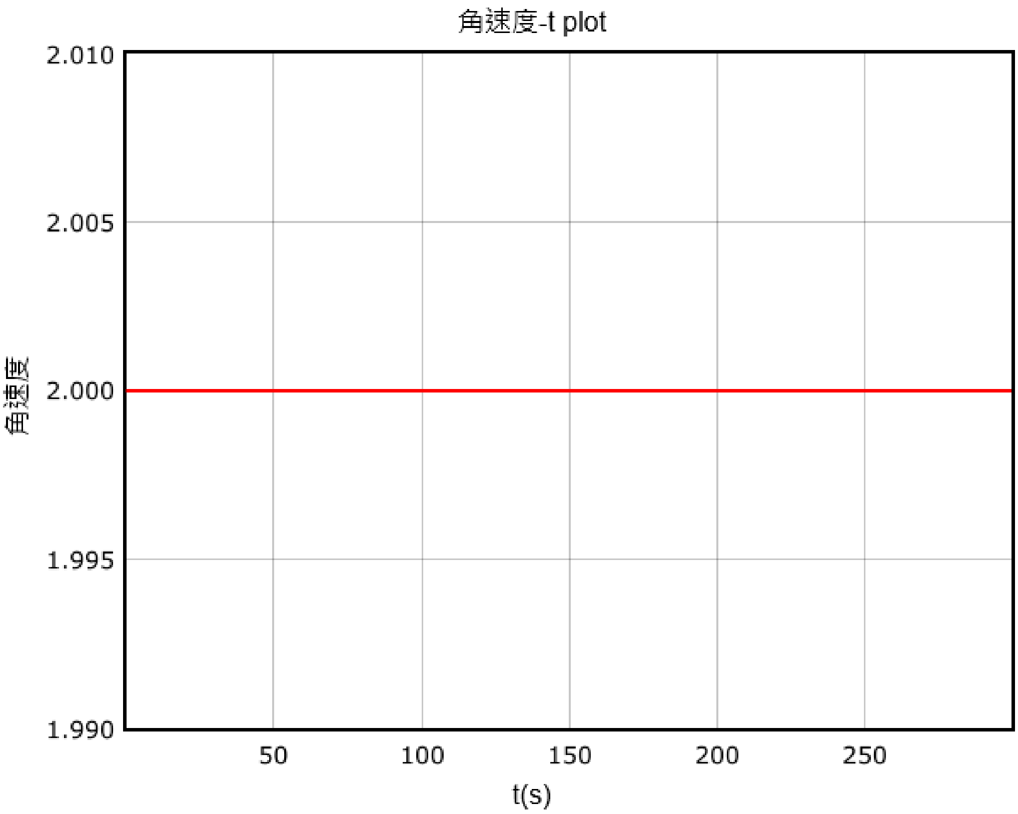
（圖 10.）

利用 VPython 模擬的盒子旋轉，下方的小方塊等同於實驗中角落的黑點

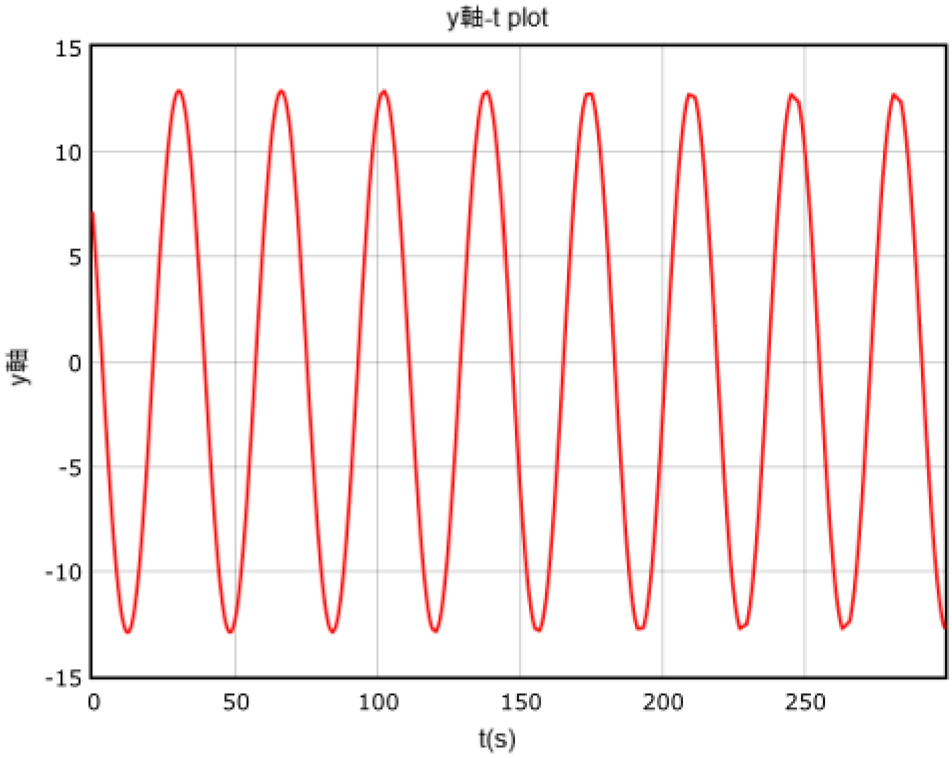
此圖為圖 10.中角落黃色方塊的 XY 座標，所畫出的圖形



此圖為旋轉的角度，對上時間，代表角速度相同

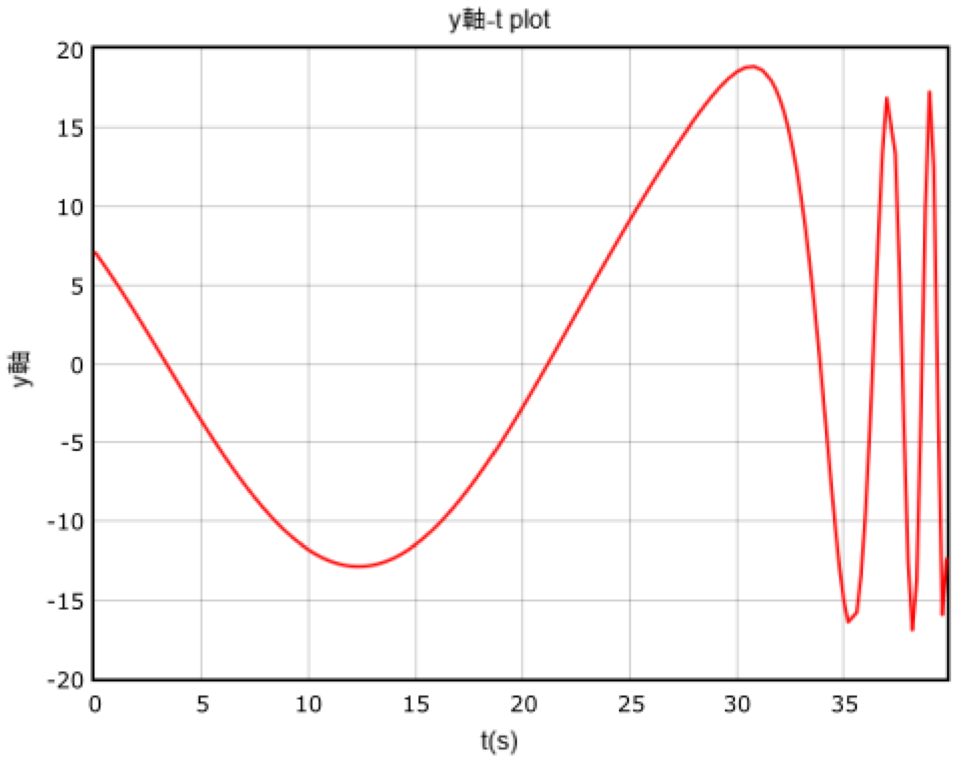


此圖代表角速度相同，且沒有角加速度。

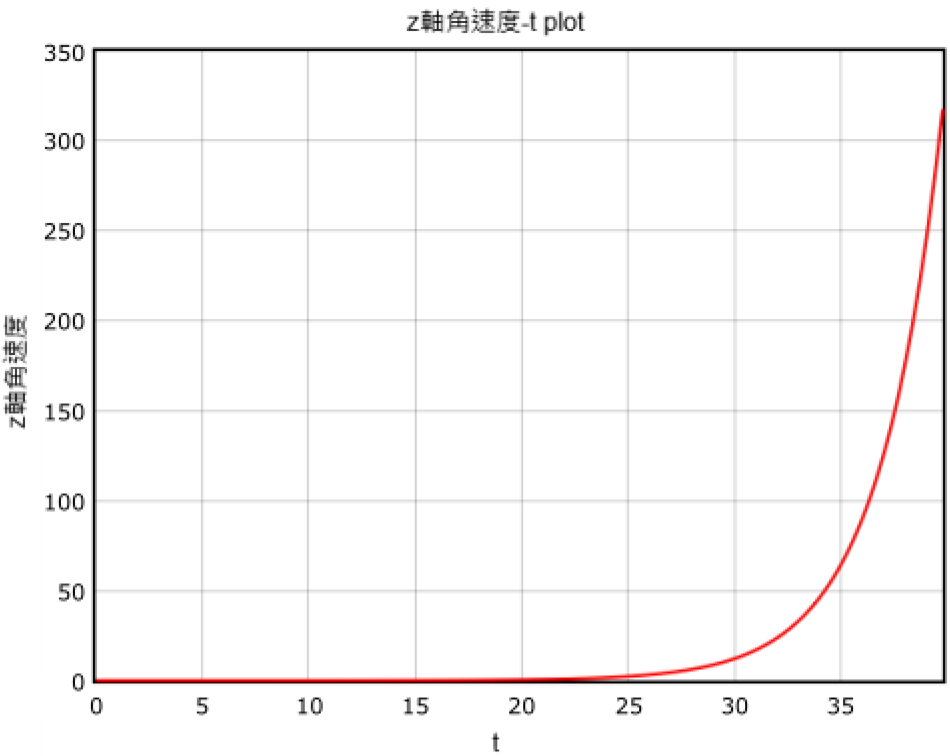


從此圖可以看到，y 軸為穩定狀態，並沒有不穩定。

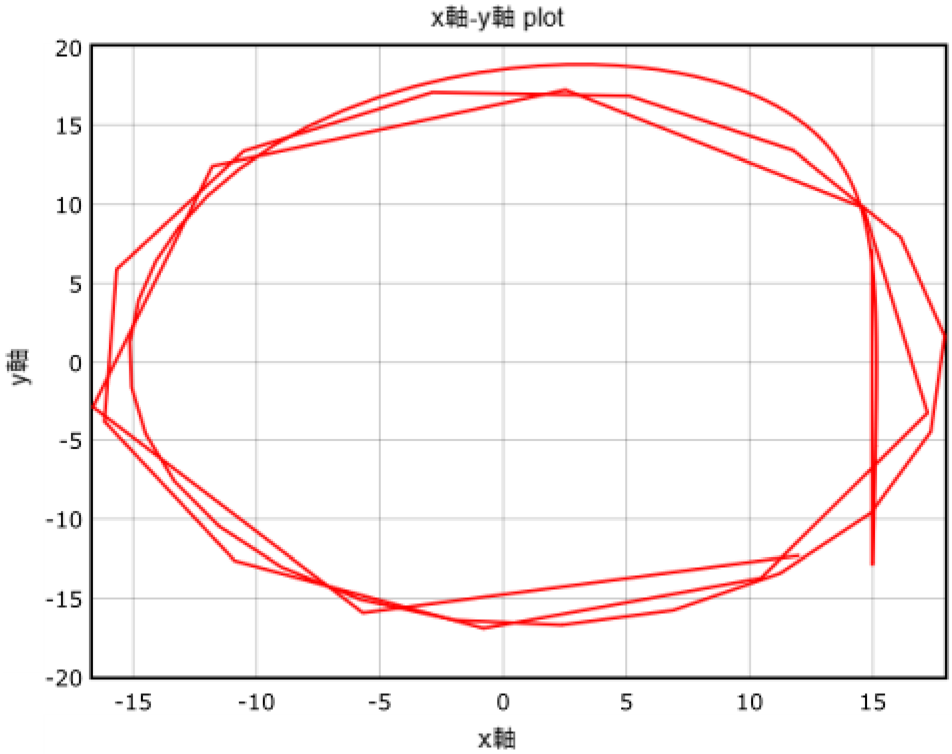
不穩定



此表前面為穩定，但後面因不穩定而亂掉。



此圖前面的角速度接近為 0，但後來往上飆，導致箱子不穩定



此圖為不穩定的 XY 座標圖

VPython 模擬程式碼

```
from vpython import *

dt=0.2
i=0
y=0.3
A=15
B=14
C=16
M=1
D=A/2
E=B/2
F=C/2
ia=M*(B**2+C**2)/12
ib=M*(C**2+A**2)/12
ic=M*(B**2+A**2)/12
```

```
wa=10
wb=0
wc=0.001
wwwa=0
wwwb=0
wwwc=0
wwa=0
wwb=0
wwc=0
t1=0
t2=0
t3=0
t=0
th1=0
th2=0
th3=0
```

```
scene = canvas(title="1D Motion", width=800, height=600, x=0, y=0, center=vec(0, 0.1, 0), background=vec(0, 0.6, 0.6))
x = arrow(pos=vector(0,0,0), axis=vector(20,0,0), color=color.green)
y = arrow(pos=vector(0,0,0), axis=vector(0,20,0), color=color.red)
z = arrow(pos=vector(0,0,0), axis=vector(0,0,20), color=color.blue)
cube = box(pos=vec(0,0,0), size=vec(A,B,C), color=color.red)
cub = box(pos=vec(D,E,F), size=vec(1,1,1), color=color.yellow)
cubb =compound([cub, cube],origin=vec(0,0,0))
cubb.axis = vector(1,0,0)
v=vec(15,7.5,10.5)
gd = graph(title="角速度-t plot", width=600, height=450, x=0, y=600, xtitle="t(s)", ytitle="x 角速度")
gd2 = graph(title="角度-t plot", width=600, height=450, x=0, y=1050, xtitle="t(s)", ytitle="x 角度")
gd3 = graph(title="x 軸-t plot", width=600, height=450, x=0, y=600, xtitle="t(s)", ytitle="x 軸")
gd4 = graph(title="y 軸角速度-t plot", width=600, height=450, x=0, y=1050, xtitle="t", ytitle="y 軸角速度")
gd5 = graph(title="y 軸角度-y plot", width=600, height=450, x=0, y=1050, xtitle="t", ytitle="y 軸角度")
gd6 = graph(title="y 軸-t plot", width=600, height=450, x=0, y=600, xtitle="t(s)", ytitle="y 軸")
gd7 = graph(title="z 軸角速度-t plot", width=600, height=450, x=0, y=1050, xtitle="t", ytitle="z 軸角速度")
gd8 = graph(title="z 軸角度-y plot", width=600, height=450, x=0, y=1050, xtitle="t", ytitle="z 軸角度")
gd9 = graph(title="z 軸-t plot", width=600, height=450, x=0, y=600, xtitle="t(s)", ytitle="z 軸")
gd10 = graph(title="x 軸-y 軸  plot", width=600, height=450, x=0, y=600, xtitle="x 軸", ytitle="y 軸")
```

```
xat = gcurve(graph=gd, color=color.red)
xtt = gcurve(graph=gd2, color=color.red)
xt = gcurve(graph=gd3, color=color.red)
yat = gcurve(graph=gd4, color=color.red)
ytt = gcurve(graph=gd5, color=color.red)
yt = gcurve(graph=gd6, color=color.red)
zat = gcurve(graph=gd7, color=color.red)
ztt = gcurve(graph=gd8, color=color.red)
zt = gcurve(graph=gd9, color=color.red)
xy = gcurve(graph=gd10, color=color.red)
```

```
while i<900:
    rate(100 )
    i=i+1

    wwwa=0
    wwwb=wa*wa*(ia-ib)*(ic-ia)*wb/(ic*ib)
    wwwc=wa*wa*(ia-ib)*(ic-ia)*wc/(ic*ib)
    # 角加速度
    wwa=0
    wwb+=wwwb*dt
    wwc+=wwwc*dt

    # 角速度
    wa =wa+wwa*dt
    wb =wb+wwb*dt
    wc =wc+wwc*dt

    # 角度變化量
    t1=wa*dt
    t2=wb*dt
    t3=wc*dt
    th1=th1+t1
    th2=th2+t2
    th3=th3+t3

    if th2>=360:
        th2=th2-360
```

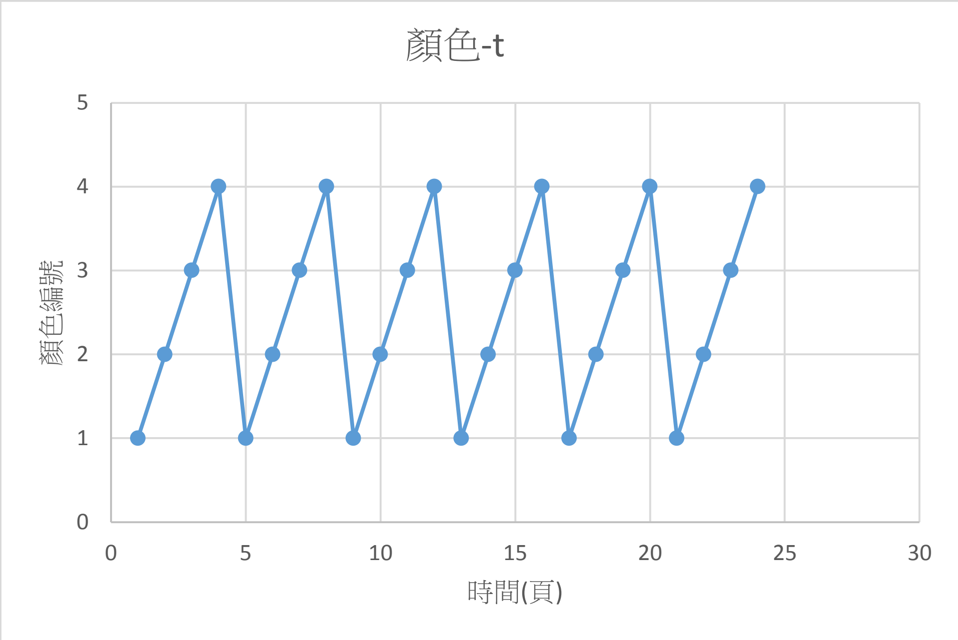
```
    if th1>=360:
        th1=th1-360

    if th3>=360:
        th3=th1-360


    cubb.rotate(angle=radians(t1),axis=vec(1,0,0))
    cubb.rotate(angle=radians(t2),axis=vec(0,1,0))
    cubb.rotate(angle=radians(t3),axis=vec(0,0,1))
    posx = cub.pos
    world_pos = cubb.compound_to_world(v)
    print(world_pos)
    posx = world_pos.x
    posy = world_pos.y
    posz = world_pos.z
    xat.plot(pos = (t, wa))
    xtt.plot(pos = (t, th1))
    xt.plot(pos = (t, posx))
    yat.plot(pos = (t, wb))
    ytt.plot(pos = (t, th2))
    yt.plot(pos = (t, posy))
    zat.plot(pos = (t, wc))
    ztt.plot(pos = (t, th3))
    zt.plot(pos = (t, posz))
    xy.plot(pos = (posx, posy))
    t=t+dt
```

實驗結果：

顏色順序分析

假設穩定狀態顏色代碼為：

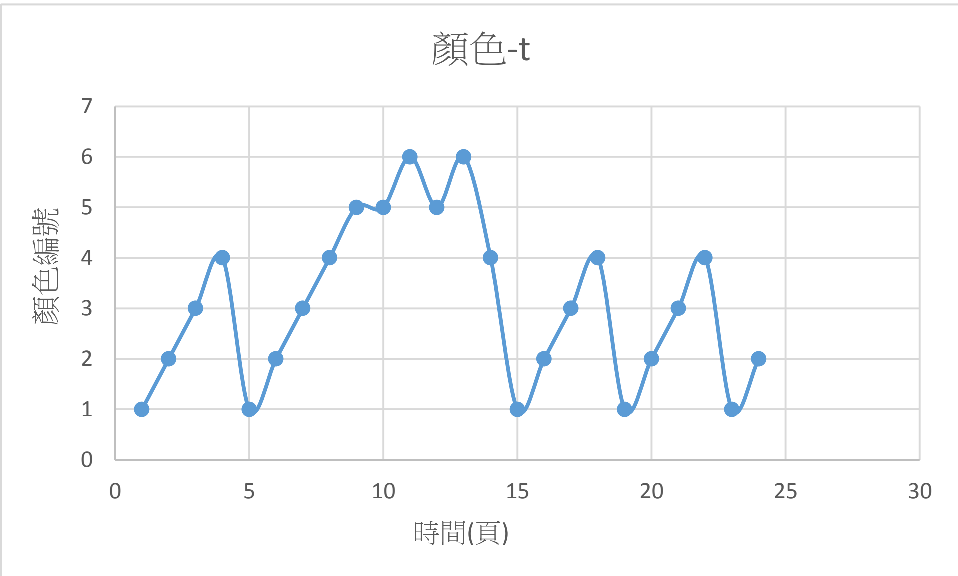
1. 紅
2. 橘
3. 黃
4. 綠
5. 藍
6. 黑



此表為穩定狀態，從此表可以輕易地了解這項實驗為穩定，因其顏色一直重複 4 種。

假設不穩定狀態顏色代碼如下：

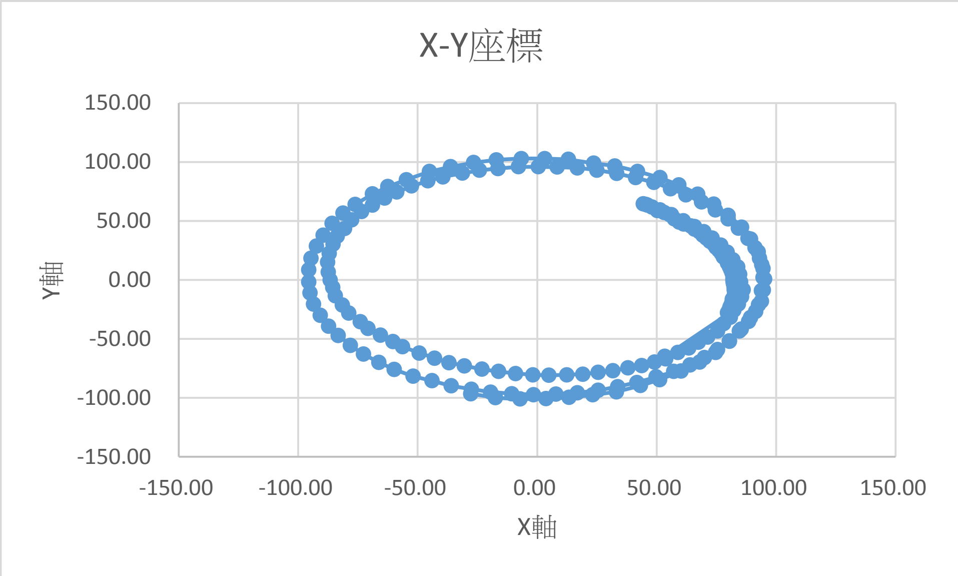
1. 黑
2. 紅
3. 藍
4. 黃
5. 橘
6. 綠



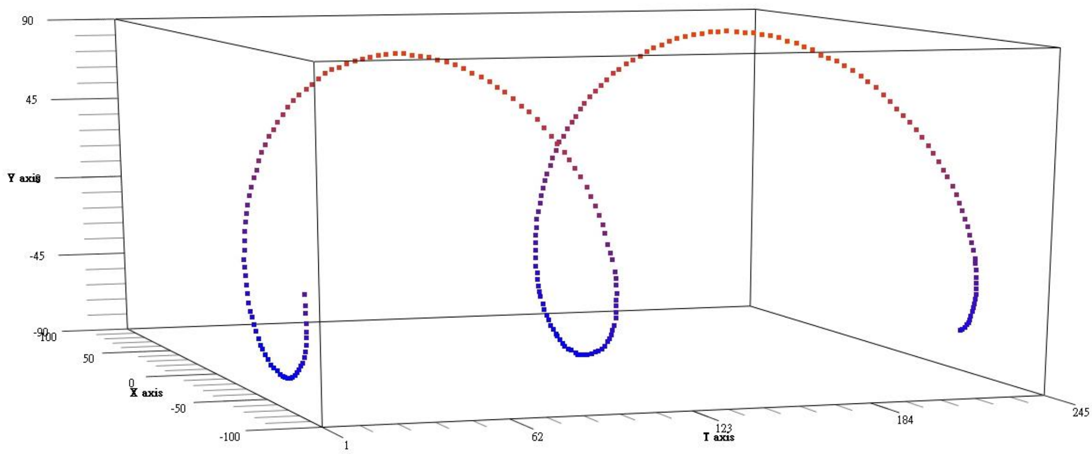
此表為不穩定狀態。從此表可以判斷出，中間有一段為不穩定狀態，而後段又趨於穩定，從而導致翻半圈又回到穩定狀態。

座標圖

<u>穩定</u>(旋轉軸平行最長邊)

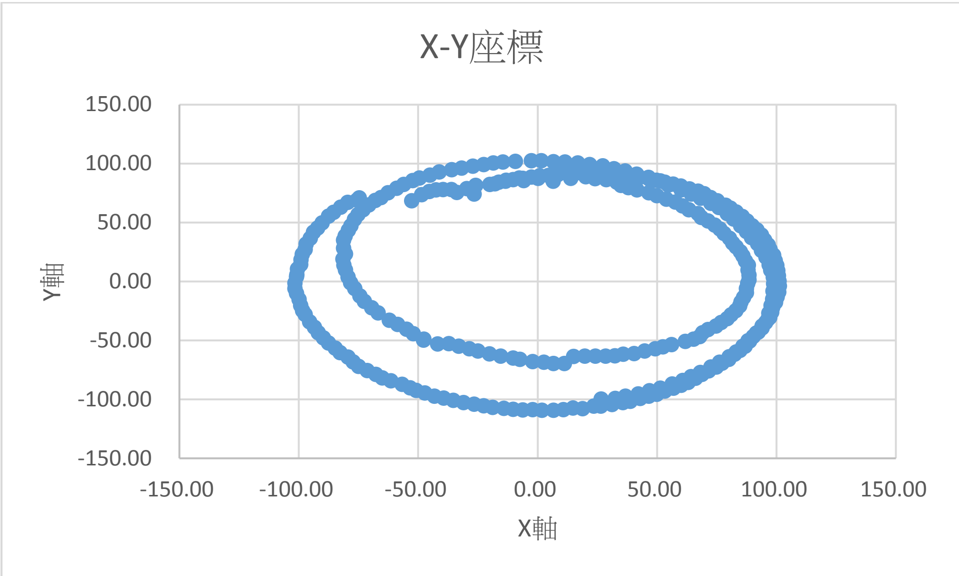


此圖為角落點的座標減中心的座標所得出的座標圖

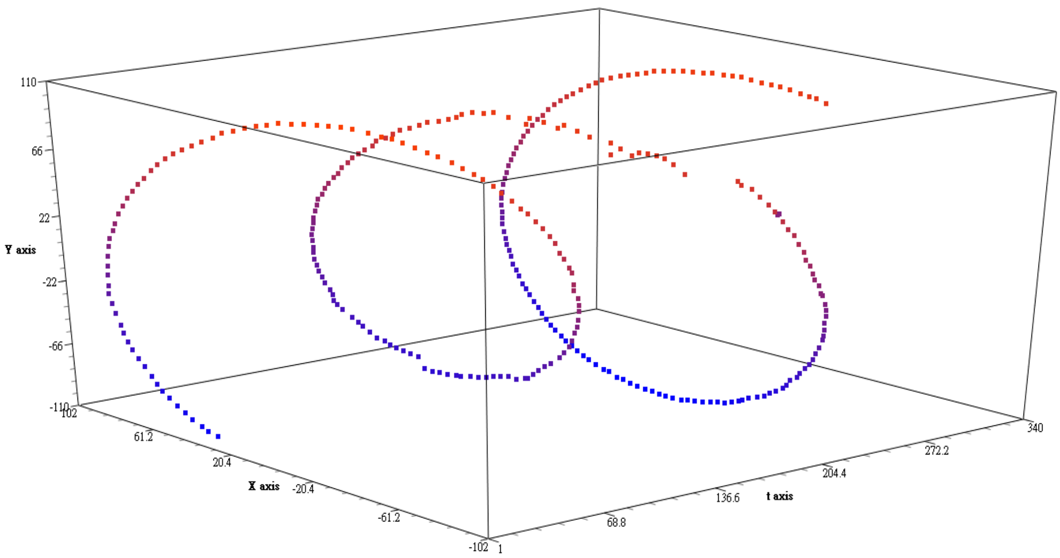


此圖為 X-Y-t 把 XY 軸對上時間所畫，可以看到連貫的螺旋，由此推斷為穩定

穩定(旋轉軸平行最短邊)

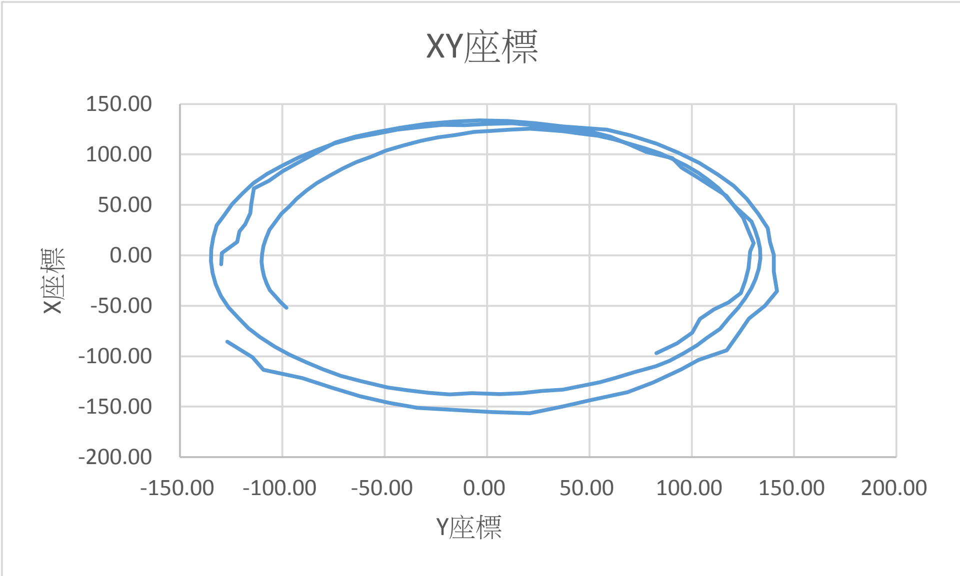


由此圖我們可以確定，旋轉穩定或不穩定是跟軸有關

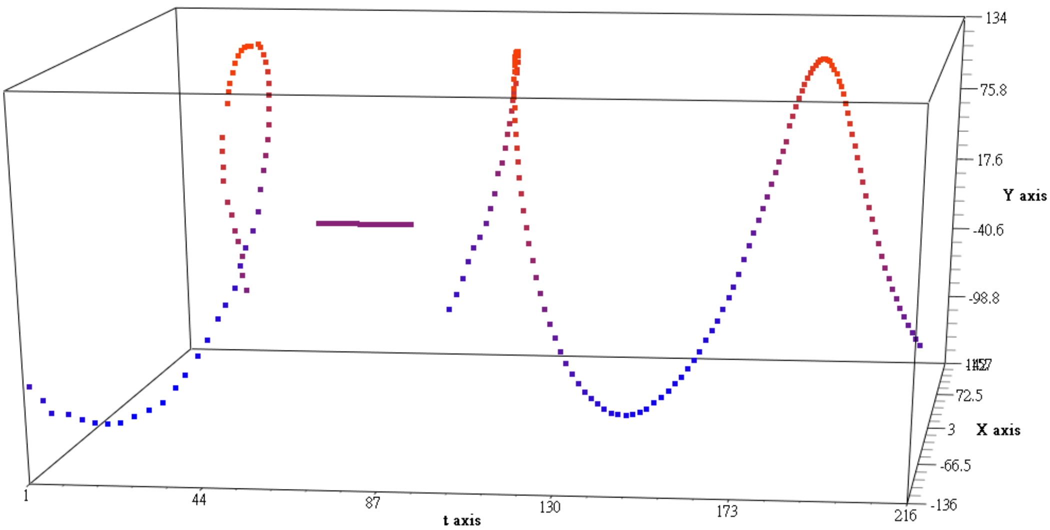


由此圖可以再次確定，當轉軸為平行最短邊時，也是屬於穩定的狀態，由此驗證了理論是正確的。

不穩定(旋轉軸平行中間長度的邊)



此表乍看之下為橢圓形，但是實際上中間有斷掉，因為有一段時間，是沒有辦法追蹤中心點及角落。由此可知為不穩定



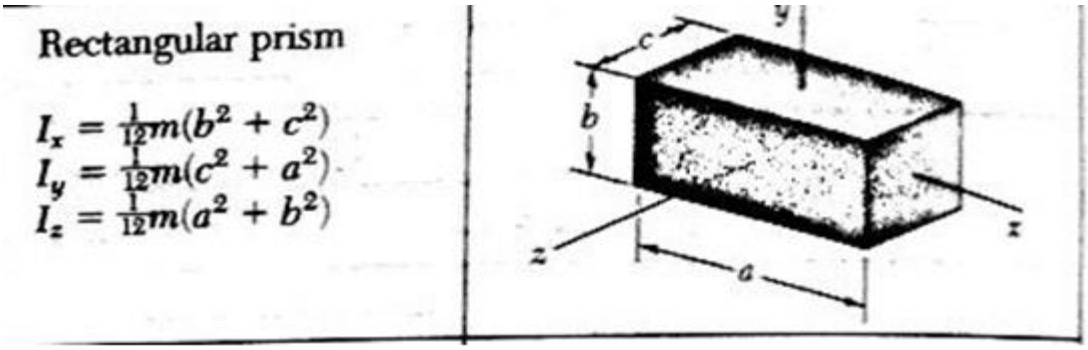
此圖可以輕易地發現，前後都屬於穩定的狀態，但是中間卻有一條突兀的直線，此直線為因為無法追蹤而留的空白，但是畫圖軟體卻將空白填為 0，因此中間會有一段 XY 座標為(0,0)的直線

結論

旋轉時的動量稱為角動量，其中有轉動慣量，且每種形狀的物體都有自己特定的公式。

從以上公式加實驗及模擬可以得知，如果$I_1 < I_2 < I_3$，會是穩定，而$I_2 < I_1 < I_3$則是不穩定；換句話說，當旋轉是繞著下圖 Z 軸時，邊長 c 如果是在中間，也就是 a>c>b 或是 a<c<b 都不穩定，反之如果邊長 c 為最大或最小時，則為穩定。

總之，會造成不同旋轉方式的原因是因為邊長所造成轉動慣量的不同，從而導致角速度的不同，致使其他軸的角速度無法震盪，因此與使用的力氣大小、旋轉的速度無關。



參考資料:

費曼物理講義及維基百科