



嘉義縣國民中小學 科學展覽會作品說明書



屆 別：61

科 別：物理

組 別：國中組

作品名稱：讓我們一起搖擺吧

關 鍵 詞：雙擺 混沌現象

編 號：A208



讓我們一起搖擺吧

Double Pendulum

摘要

我們以下擺擺動圈數、上下擺擺動時順時針與逆時針中的關係去進一步探討混沌擺的一些性質。實驗發現有幾項：1、下擺擺動圈數非常不規則。2、上下擺的擺動若同方向會比反方向的擺動圈數多一些。3、位能愈高不一定可以使轉動圈數變多。

壹、研究動機

因為常在科普節目或文章上看到「蝴蝶效應」這個詞，它的涵義為『一個微不足道的初始變化就會引發整個系統產生巨大的連鎖反應，從而導致最終的結果發生天翻地覆的變化』(註 1)。最常聽到的白話舉例為，假如在巴西有一隻蝴蝶拍拍翅膀，震動的空氣可能會在北美洲造成嚴重的風暴。

經過延伸閱讀後，豹紋這類看似隨機如混沌產生的圖案，是可以被解釋的。如『雪花、海岸、波浪、雲、樹等，過去一直被認為是經由隨機過程產生的自然現象，在今天都能利用碎形結構加以分析及模擬。』(註 2)。它們都屬非線性科學的研究範疇中，『在這看似無形但是有形的世界中尋找出自然的規則，在沒有規則的圖形和現象中找尋規則』(註 3)。

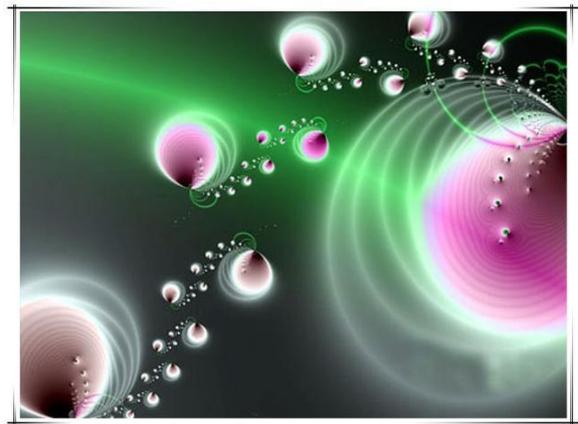


圖 1-1：碎形圖片(註 4)

而維基百科中提到雙擺是具有混沌方案最簡單的動力系統之一(註 5)，這件事讓我們很訝異。因為自然與生活科技第五冊課本中，1-1 時間的測量提到單擺是最簡單的時間測量工具，單擺的擺動週期只跟擺長有關，與擺錘質量、擺角關係都不大，卻再接一個單擺在原單擺下方成雙擺後，其擺動就成為混沌。我們想要自製雙擺來驗證其現象，並試圖找出其是否有如碎形中的『看似無形但是有形』

貳、研究目的

一、實驗次數與下擺轉圈次數的關係

實驗 1：固定下擺角度，改變上擺角度，分析實驗次數與下擺轉圈次數的關係

實驗 2：固定上擺角度，改變下擺角度，分析實驗次數與下擺轉圈次數的關係

二、位能與下擺轉圈次數的關係

三、上下擺轉動方向(順逆時針)與下擺轉圈次數的關係

參、研究設備與器材

雙擺機具、三角板、量角器、手機

肆、研究過程與方法

一、研究原理

根據維基百科(註 5)的分析，假設二個擺的擺長 l 及質量都相同 m ，運動限制在二維空間內。

複擺的質量假設是延著其長度均勻分布，則其複擺的質心是在中點，複擺的臂對中點的轉動慣量為

$$I = \frac{1}{12} m \ell^2$$

若笛卡爾坐標系的原點是在第一個擺（最上方擺）的固定點，則其第一個擺的質心在：

$$x_1 = \frac{\ell}{2} \sin \theta_1$$

$$y_1 = -\frac{\ell}{2} \cos \theta_1$$

第二個擺的質心在：

$$x_2 = \ell \left(\sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2 \right)$$

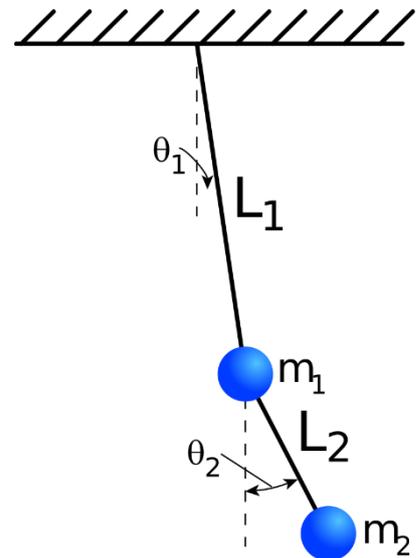


圖 4-1：雙擺(註 5)

$$y_2 = -\ell \left(\cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \right)$$

雙擺系統的拉格朗日量為

L=kinetic energy - potential energy

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetic energy} - \text{potential energy} \\ &= \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

第一項是質心的平移動能，第二項是擺延著質心旋轉的轉動動能，最後一項是雙擺在均勻重力場下的勢能。其點標示表示變數的時間導數。將以上的座標代入，重組後可得

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} m \ell^2 (\dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + \frac{1}{2} mg \ell (3 \cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

這裡只有一個守恆量（能量），沒有守恆的動量，二個廣義的動量可以表示為

$$\begin{aligned} p_{\theta_1} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{6} m \ell^2 (8\dot{\theta}_1 + 3\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\ p_{\theta_2} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{6} m \ell^2 (2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

上式可以求得

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{6}{m \ell^2} \frac{2p_{\theta_1} - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_2}}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{6}{m \ell^2} \frac{8p_{\theta_2} - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_1}}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

運動方程式為

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\theta_1} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 3 \frac{g}{\ell} \sin \theta_1) \\ \dot{p}_{\theta_2} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} m \ell^2 (-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin \theta_2) \end{aligned}$$

雖然已經導出運動方程式，但根據維基百科的模擬實驗，雙擺的運動對初始條件非常敏感。如圖 4-2，三個初始位置幾乎相同的雙擺，一段時間後軌跡就發散，，表示系統的混沌特性。

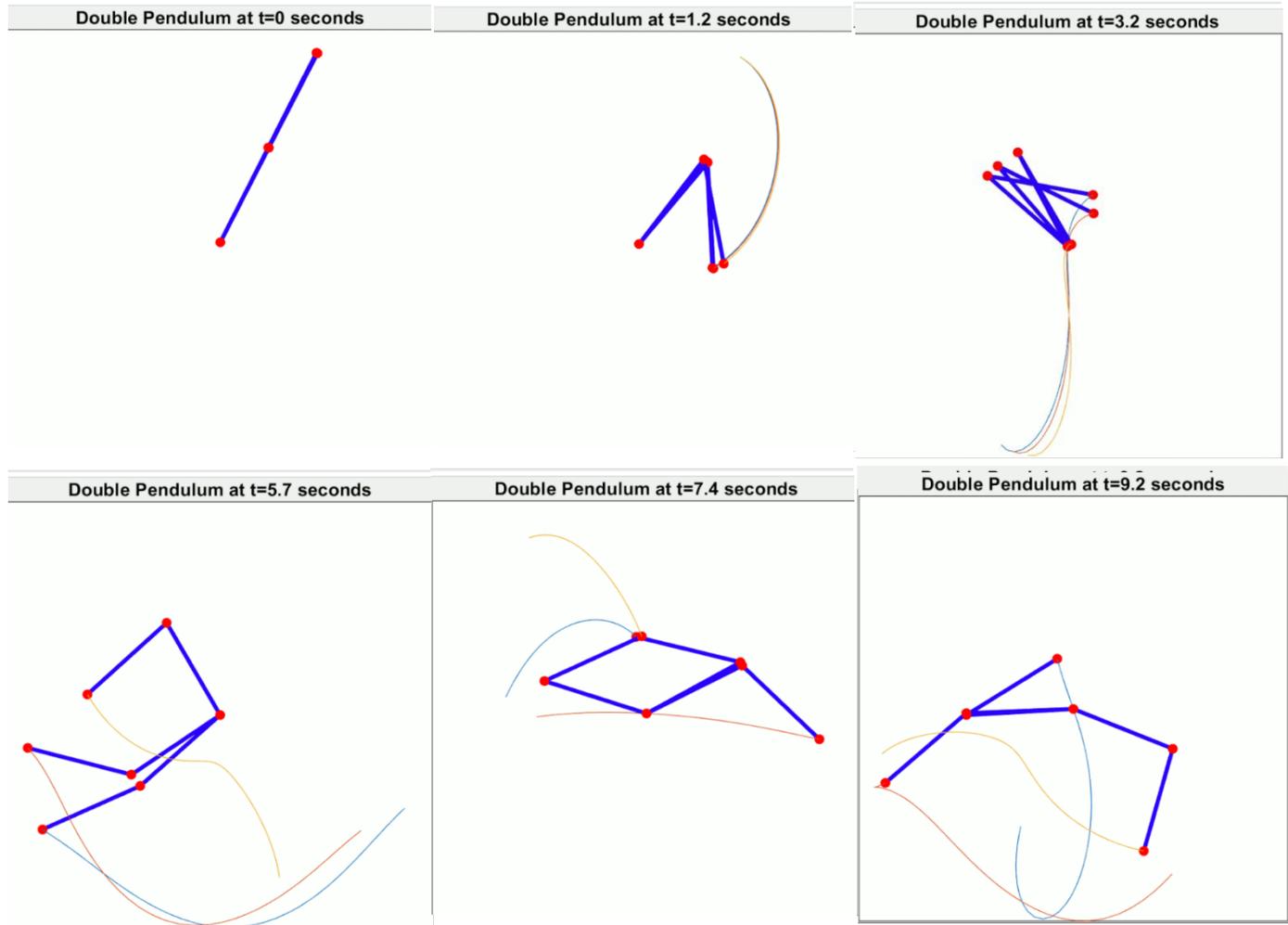
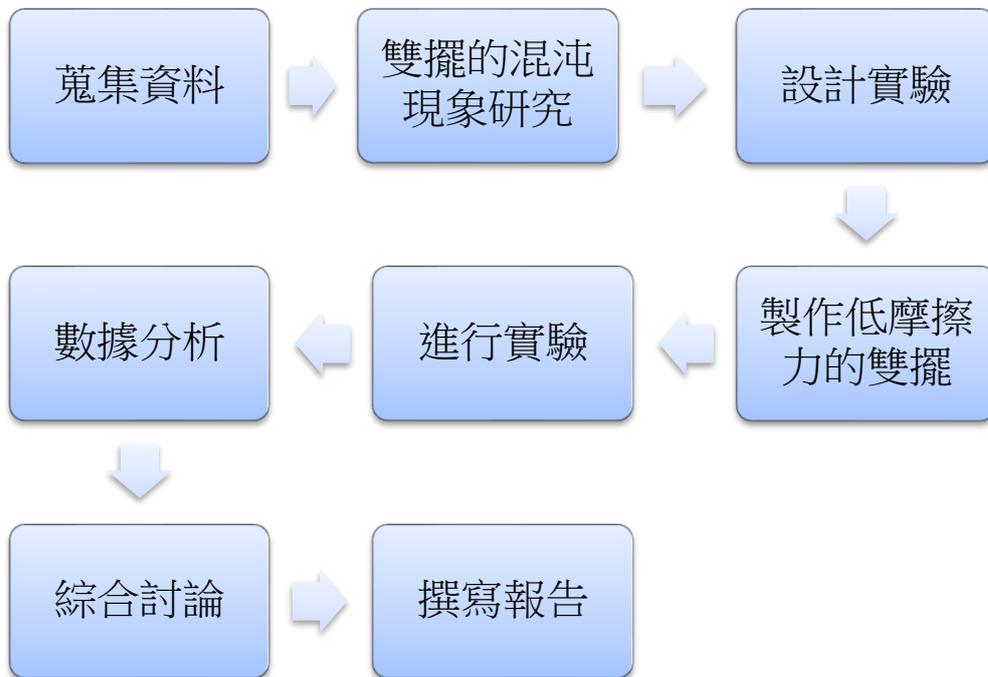


圖 4-2：雙擺(註 5)

我們將試圖以另一種方法來檢驗其混沌性，如下敘述研究過程與方法

二、研究架構



- 蒐料資料：我們在圖書館的物理叢書以及網路上資料並加以整理。
- 雙擺的混沌現象研究：從維基百科中所閱覽到的數據加以分析並思考要從雙擺這個實驗的哪方面問題著手。
- 實驗設計：繪畫出雙擺的製造草圖。
- 製作低摩擦力的雙擺：拜託鐵工廠的技師於空閒的時候幫忙製作。
- 進行實驗：分次固定上、下擺的角度，得以實驗出我們要的結果。
- 數據分析：經過十次的實驗後，整理數據並用數線的方式呈現。
- 綜合討論：分析實驗數據並討論其現象可能的原因。
- 撰寫報告：把我們實驗結及討論寫成符合縣賽格式的報告。

三、實驗步驟

- (一)自製上擺長度 30.3 公分、124.6 公克。下擺長度 15.5 公分、64.8 公克。上擺長度約下擺的二倍，如圖 4-5
- (二)自製 45、90、135 及 180 度的量角器，如圖 4-4。
- (三)利用量角器將上單擺設為 90 度，再用量角器將下單擺設為 0 度(類似如圖 4-5)。釋放雙擺時，同時啟動錄影，待下單擺無法再旋轉一整圈時停止錄影。觀看影片，計算下單擺的擺動圈數。
- (四)重覆步驟(三)10 次。
- (五)將下單擺分別設為 45、90、135、180、225、270 及 315 度，重覆步驟(三)~(四)的實驗。
- (六)將上單擺為 270 度時，重覆步驟(三)~(五)的實驗。

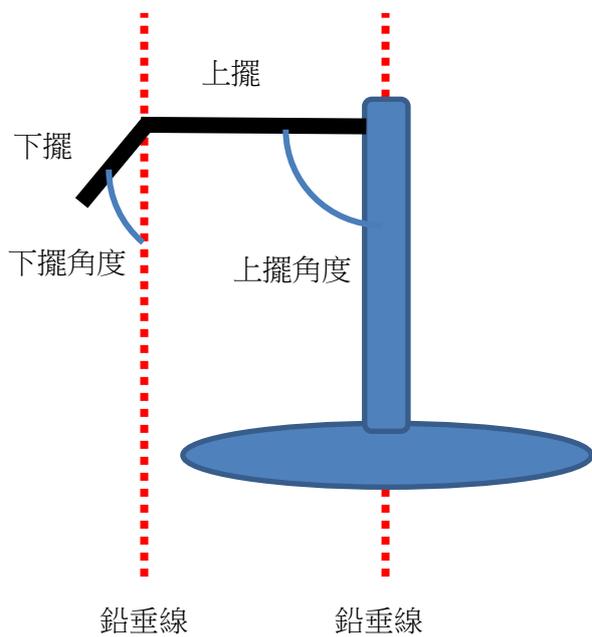


圖 4-3：裝置圖



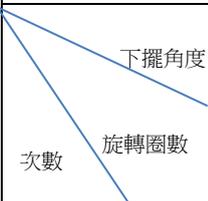
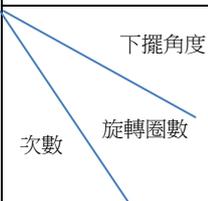
圖 4-4：量角器



圖 4-5：實驗操作方法

伍、研究結果

一、實驗數據

上擺 90 度								
	0	45	90	135	180	225	270	315
第 1 次	19	37	26	32	28	32	32	36
第 2 次	10	38	29	40	31	28	31	37
第 3 次	17	27	31	48	20	34	29	28
第 4 次	26	31	20	33	22	18	42	41
第 5 次	12	43	16	34	31	47	33	36
第 6 次	13	33	31	49	41	37	33	22
第 7 次	10	28	42	27	15	24	37	25
第 8 次	11	30	22	38	25	34	42	31
第 9 次	24	38	30	24	43	28	41	28
第 10 次	18	40	34	27	19	43	35	39
平均	16	34.5	28.1	35.2	27.5	32.5	35.5	32.3
上擺 90 度								
	0	45	90	135	180	225	270	315
第 1 次	16	27	16	25	21	28	33	25
第 2 次	20	16	13	23	19	31	22	22
第 3 次	14	15	27	34	21	36	29	31
第 4 次	29	30	14	28	25	29	26	26
第 5 次	21	11	17	21	26	36	21	24
第 6 次	17	15	24	26	22	39	17	26
第 7 次	11	32	19	24	30	36	27	35
第 8 次	15	16	25	35	25	32	17	28
第 9 次	46	18	21	25	23	23	17	27
第 10 次	31	23	22	30	33	27	20	17
平均	22	20.3	19.8	27.1	24.5	31.7	22.9	26.1

二、實驗相關圖

(一)實驗次數與旋轉圈數的關係

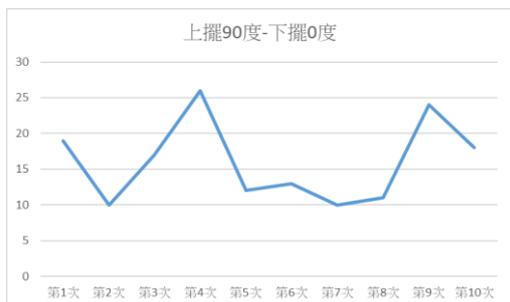


圖 5-1

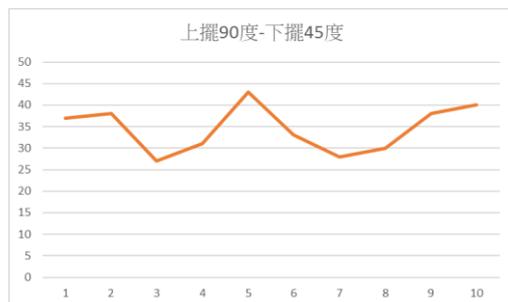


圖 5-2

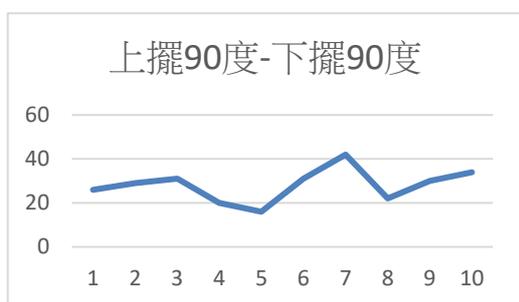


圖 5-3

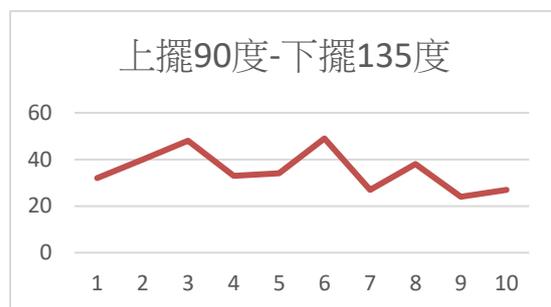


圖 5-4

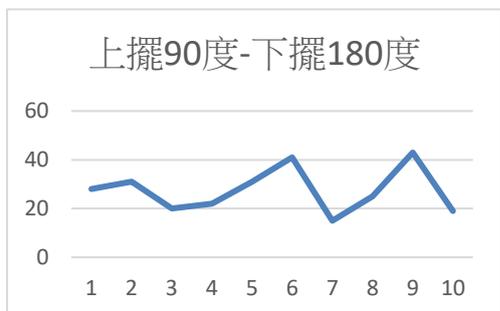


圖 5-5



圖 5-6

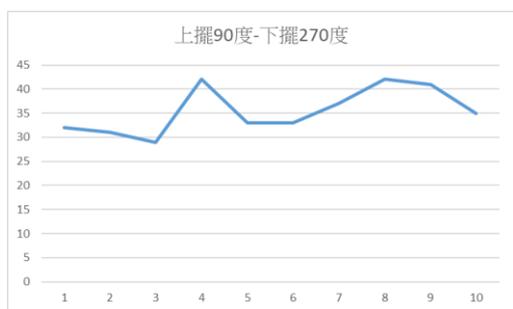


圖 5-7

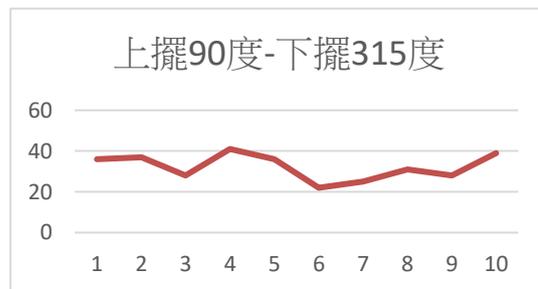


圖 5-8



圖 5-9



圖 5-10



圖 5-11



圖 5-12

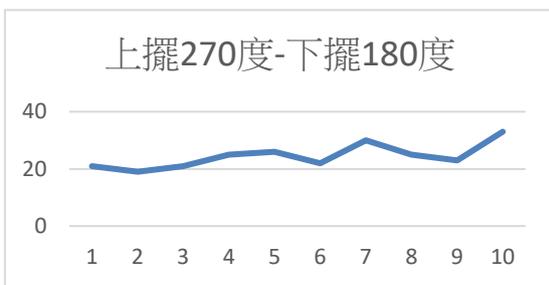


圖 5-13



圖 5-14

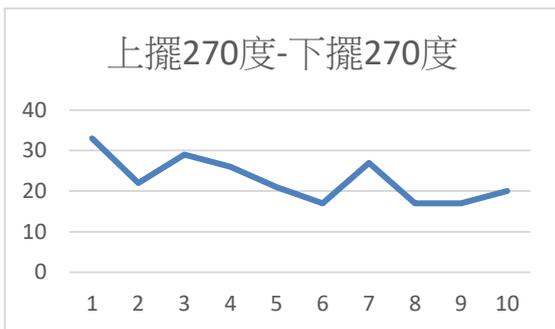


圖 5-15



圖 5-16

(二)位能與下擺轉圈次數的關係

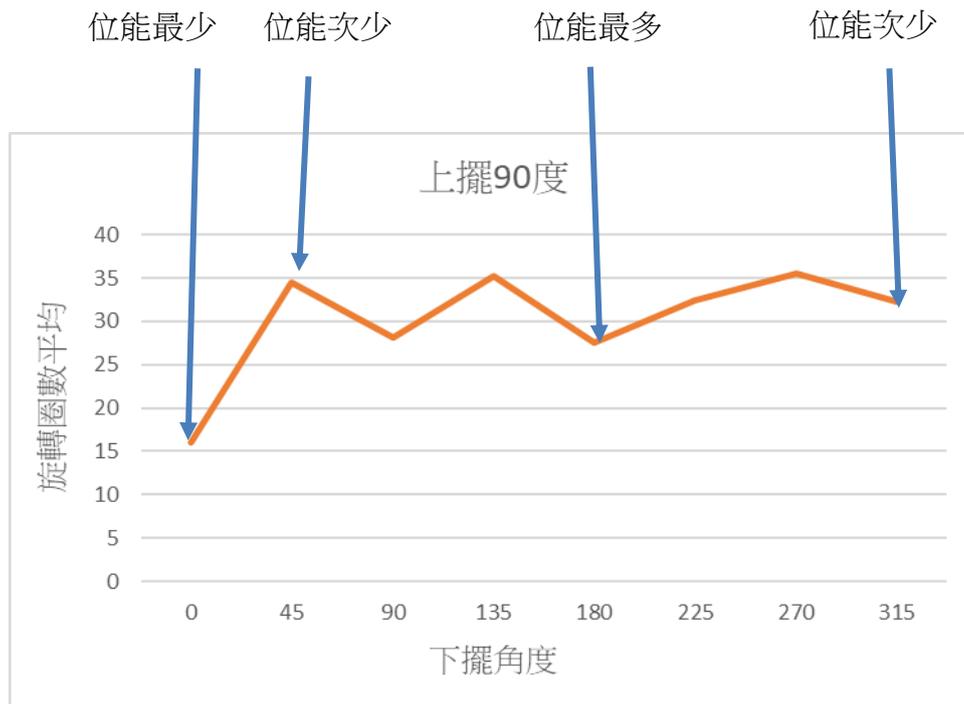


圖 5-17

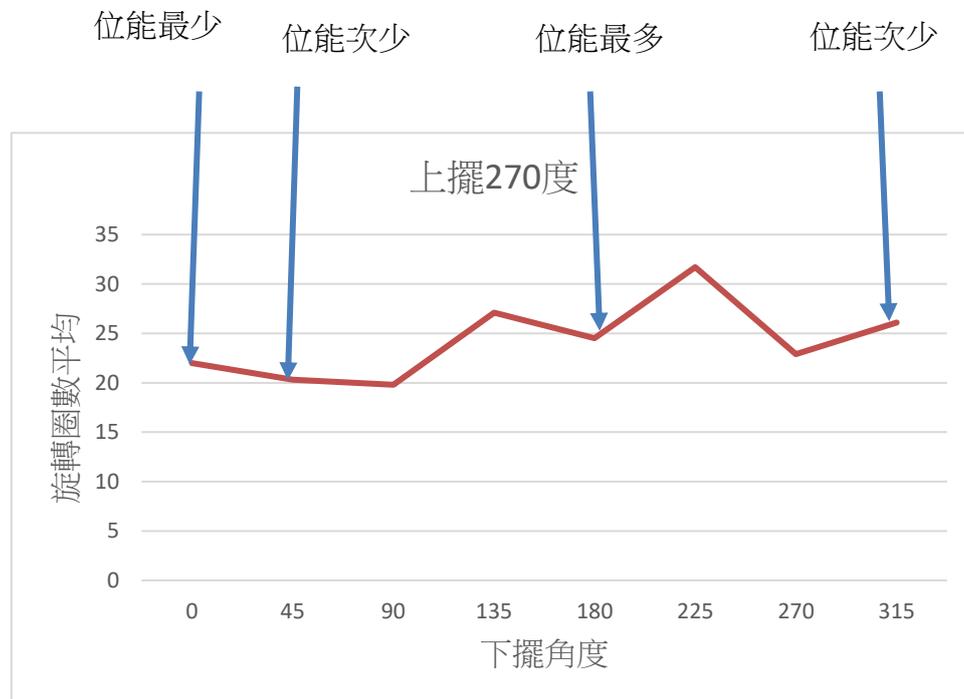


圖 5-18

(三)上下擺轉動方向(順逆時針)與下擺轉圈次數的關係

數列 1 為上擺逆時針-下擺逆時針、數列 2 為上擺逆時針-下擺順時針

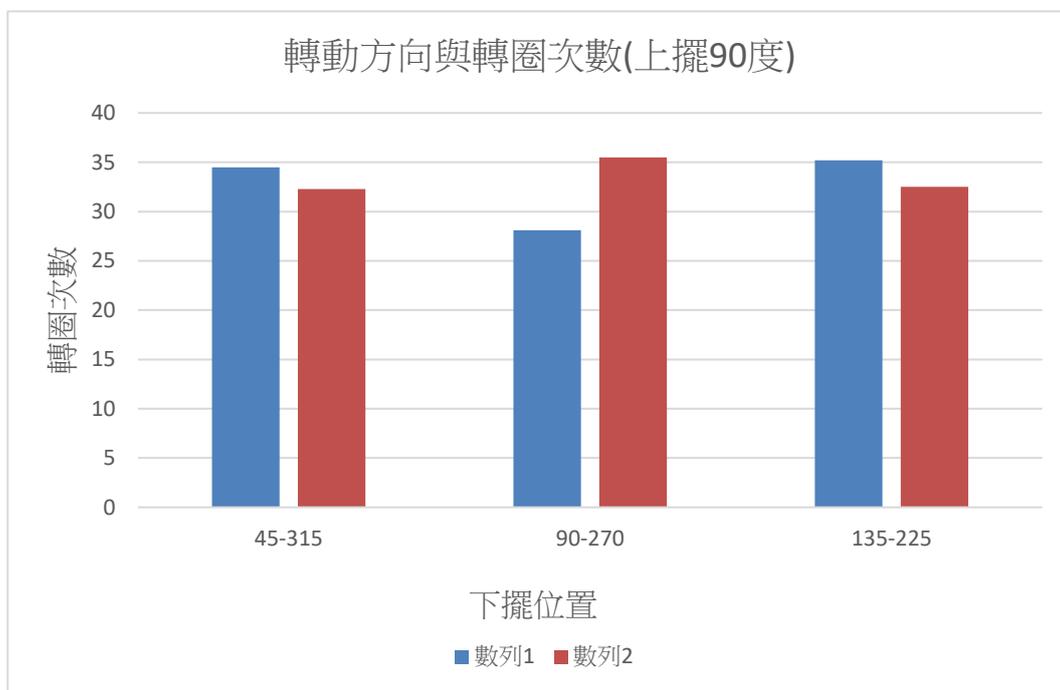


圖 5-19

數列 1 為上擺順時針-下擺逆時針、數列 2 為上擺順時針-下擺順時針

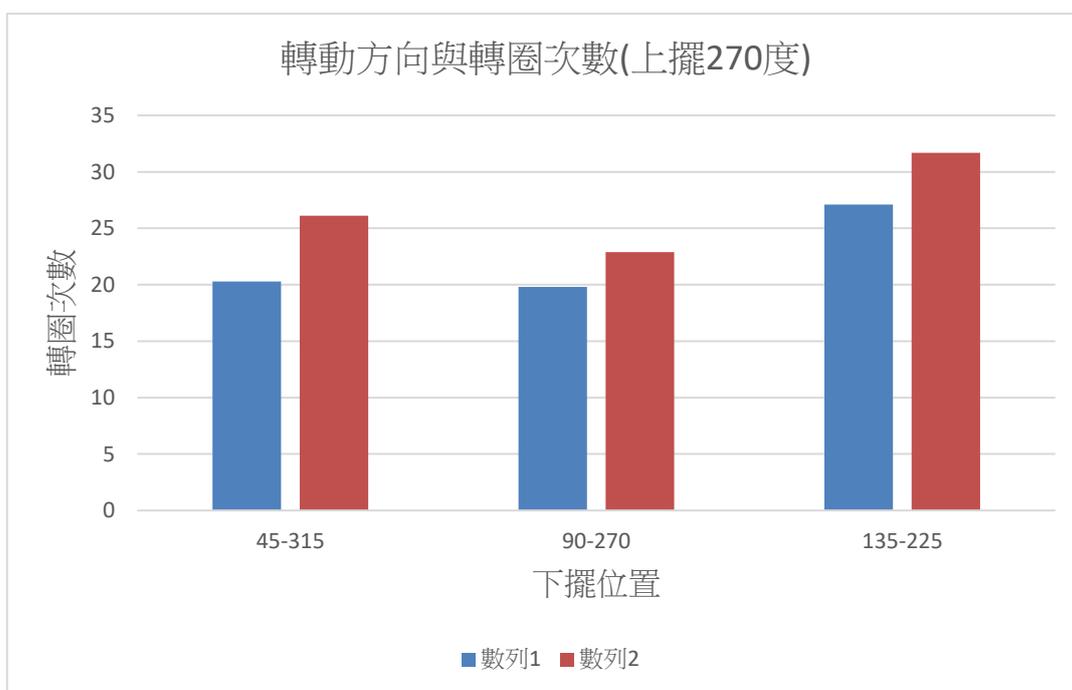


圖 5-20

陸、討論

一、研究實驗次數與下擺轉圈次數的關係中，總共做了 16 組，每組 10 次實驗，如圖 5-1~5-16。每組的 10 次實驗的條件皆相同，下擺轉圈次數卻很少是重覆的，甚至下擺轉圈次數變化很大。將每組實驗中最多圈數及最少圈數整理如下：

上擺 90 度								
下擺角度	0	45	90	135	180	225	270	315
最多圈數	26	43	42	49	43	47	42	41
最少圈數	10	27	16	24	15	18	29	22

上擺 270 度								
下擺角度	0	45	90	135	180	225	270	315
最多圈數	46	32	27	35	33	39	33	35
最少圈數	11	11	13	21	19	23	17	17

依我們的實驗結果，雖然有雙擺的運動方程式，但卻無法測量出有規則性的擺動圈數。理論模型有提到，雙擺對釋放的初始條件很敏感，有可能我們實驗時，每次的釋放時，都因一些因素造成初始條件有些些的不同。

二、在探討雙擺的位能與下擺轉圈次數的關係時，原本我們預估位能愈高，10 次的下擺轉圈次數的平均值應該會愈大，但卻看不出有這種關係，如圖 5-17~圖 5-18。我們推論可能的原因為，釋放雙擺後，其具有的位能會轉成上、下擺轉動的動能，又因為雙擺的擺動是混沌，所以，無法確定位能完全消耗時，上擺的擺動次數是否固定?? 如果上擺的擺動次數多，那就有更多的位能消耗在上擺的軸承上，以致於下擺所擁有的動能較少，所以，即使總位能較多，也無法保證其下擺轉圈次數會較多。

三、研究上下擺轉動方向(順逆時針)與下擺轉圈次數的關係中，圖 5-19 中的數列 1 是初始釋放時上擺是逆時針旋轉、下擺是逆時針旋轉(後簡稱逆-逆)，數列 2 是初始釋放時上擺是逆時針旋轉、下擺是順時針旋轉(後簡稱逆-順)。

圖 5-20 中的數列 1 是初始釋放時上擺是順時針旋轉、下擺是逆時針旋轉(後簡稱順-逆)，數列 2 是初始釋放時上擺是順時針旋轉、下擺是順時針旋轉(後簡稱順-順)。

由圖 5-19 與 5-20 中可以看出，當『上下擺初始擺動方向相同』時，下擺平均轉圈次數會比『上下擺初始擺動方向相反』多。我們推論可能的原因為上下擺動相反時會因二者運動方向相反而造成上擺速度變慢，所以，最後它們的轉圈次數會比較少。

柒、結論

- 一、以我們的實驗結果也是跟科學家提出的觀念，雙擺的擺動是混沌現象。
- 二、因為我們每組實驗只做 10 次，次數不夠，雙擺的擺或許規律，只是需要更多次的實驗才能看出其中的奧妙，如果有時間，我們會進一步探討。
- 三、原本我們預估位能愈高，10 次的下擺轉圈次數的平均值應該會愈大，但卻沒有這種關係。而我們的推論是因為有部份位能消耗在上擺的軸承上，而無法讓下擺再轉圈。所以，我們也需要做更深入的記錄，把上擺擺動的次數、下擺順時針及逆時針各轉幾圈，還有下擺無法轉圈的擺動次數等等記錄詳細，如次才有機會證明我們的推論。

捌、參考文獻資料

1. <https://www.mdeditor.tw/dl/12vAB/zh-tw>
2. <https://jchsien.pixnet.net/blog/post/338374552>
3. <https://scitechvista.nat.gov.tw/c/sVF1.htm>
4. <https://kknews.cc/culture/5nlz2k3.html>
5. <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%8C%E6%91%86>
6. <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B7%B7%E6%B2%8C%E7%90%86%E8%AE%BA>